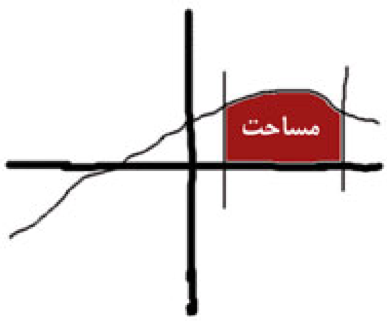
ریاضی مهندسی

گردآوري :

سراج جمالی

انتگرال

در حساب دیفرانسیل و انتگرال ، از انتگرال یک تابع براي عمومیت دادن به محاسبه مساحت ، حجم ، جرم یک تابع استفاده می شود. فرایند پیدا کردن جواب انتگرال را انتگرال گیري گویند.البته تعاریف متعددي براي انتگرال گیري وجود دارد ولی در هر حال جواب مشابه اي از این تعاریف بدست می آید. انتگرال یک تابع مثبت پیوسته در بازه (a,b) در واقع پیدا کردن مساحت بین خطوط x=10 , x=0 و خم منفی F است . پس انتگرال F بین a و b در واقع مساحت زیر نمودار است. اولین بار لایب نیتس نماد استانداري براي انتگرال معرفی کرد و به عنوان مثال انتگرال f بین a و b رابه صورت $\int_a^b f(x)\,dx$ نشان می دهند علامت $\int$ ،انتگرال گیري از تابع f را نشان می دهند ،aو b نقاط ابتدا و انتهاي بازه هستند و f تابعی انتگرال پذیر است و dx نمادي براي متغیر انتگرال گیري است .



از لحاظ تاریخی dx یک کمیت بی نهایت کوچک را نشان می دهد. هر چند در تئوریهاي جدید، انتگرال گیري بر پایه متفاوتی پایه گذاري شده است به عنوان مثال تابع f را بین x=0 تا x=10 در نظر بگیرید ،مساحت زیر نمودار در واقع مساحت مستطیل خواهدبود که بینx=0 ، x=10، y=0، y=3محصور شده است یعنی داراي طول 10 و عرض 3است پس مساحت آن برابر 30 خواهد بود . انتگرال یک تابع مساحت زیر نمودار آن تابع است.

اگر تابعی داراي انتگرال باشد به آن انتگرال پذیر گویند و تابعی که از انتگرال گیري از یک تابع حاصل می شود تابع اولیه گویند . اگر انتگرال گیري از تابع در یک محدوده خاص باشند به آن **انتگرال معین** گویند که نتیجه آن یک عدد است ولی اگر محدوده آن مشخص نباشد به آن **انتگرال نامعین** گویند .

محاسبه انتگرال

اکثر روش هاي اساسی حل انتگرال بر پایه قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال بنا نهاده شده است که بر طبق آن داریم :

1.f تابعی در بازه (a,b) در نظر می گیریم .
2.پاد مشتق f را پیدا می کنیم که تابعی است مانند f که و داریم $F' = f$ **:**
3.قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال را در نظر می گیریم :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

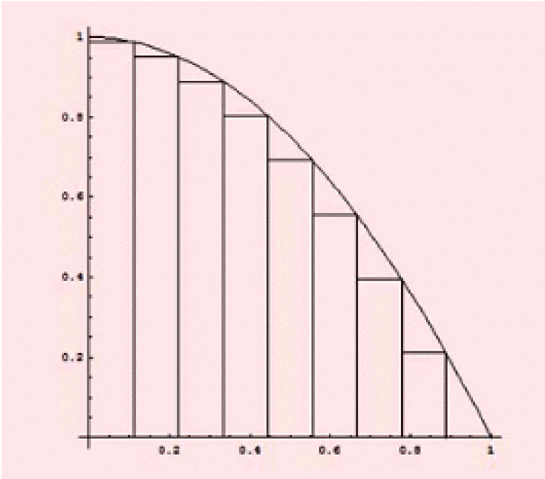
بنابراین مقدار انتگرال ما برابر $F(b) - F(a)$ **خواهد بود .**

به این نکته توجه کنید که انتگرال واقعاً پاد مشتق نیست (یک عدد است) اما قضیه اساسی به ما اجازه می دهد تا از پاد مشتق براي محاسبه مقدار انتگرال استفاده کنیم .
معمولاً پیدا کردن پاد مشتق تابع f کار ساده اي نیست و نیاز به استفاده از تکنیکهاي انتگرالگیري دارد این تکنیکها عبارتند از :

- انتگرال گیري بوسیله تغییر متغیر
- انتگرال گیري جزء به جزء
- انتگرال گیري با تغییر متغیر مثلثاتی
- انتگرال گیري بوسیله تجزیه کسرها

روش هایی دیگر نیز وجود دارد که براي محاسبه انتگرالهاي معین به کار می رود همچنین می توان بعضی از انتگرال ها با ترفند هایی حل کرد براي مثال می توانید به انتگرال گاوسی مراجعه کنید .

تقریب انتگرالهاي معین



محاسبه سطح زیر نمودار بوسیله مستطیل هایی زیر نمودار.
هر چه قدرعرض مستطیل ها کوچک میشوندمقدار دقیق تري از مقدار انتگرال بدست میآید.

انتگرال هایی معین ممکن است با استفاده از روش هاي انتگرال گیري عددي ،تخمین زده شوند.یکی از عمومی ترین روش ها ،روش مستطیلی نامیده می شود در این روش ناحیه زیر نمودار تابع به یک سري مستطیل تبدیل شده و جمع مساحت آنها نشان دهنده مقدار تقریبی انتگرال است .

از دیگر روش هایی معروف براي تخمین مقدار انتگرال روش سیمپسون و روش ذوزنقه اي است. اگر چه روش هاي عددي مقدار دقیق انتگرال را به ما نمی دهند ولی در بعضی از مواقع که انتگرال تابعی قابل حل نیست یا حل آن مشکل است کمک زیادي به ما می کند .

تعریف هاي انتگرال

از مهم ترین تعاریف در انتگرال می توان از انتگرال ریمان و انتگرال لبسکی (**lebesgue**)است. انتگرال ریمان بوسیله برنهارد ریمان در سال 1854 ارئه شد که تعریف دقیقی را از انتگرال ارائه می داد تعریف دیگر را هنري لبسکی ارائه داد که طبق این تعریف شرایط تعویض پذیري حد و انتگرال با شرط مساوي ماندن عبارت، ارائه می کرد .

از دیگر تعاریف ارائه شده در زمینه انتگرال میتوان به انتگرال riemann-stieltjes اشاره کرد. پس به طور خلاصه سه تعریف زیر از مهمترین تعاریف انتگرال میباشند :

****

آموزش انتگرال

انتگرالها یک بحث اساسی ریاضیات عالی را تشکیل داده که میتوان کاربرد آنرا درتمام علوم طبیعی، انسانی وغیره مورد مطالعه قرارداد.

اولين بار لايب نيتس نماد استانداردي براي انتگرال معرفی کرد. $\int_a^b f(x)\,dx$ a و b نقاط ابتدا و انتهاي بازه هستند و f تابعی انتگرال‌پذير است و dx نمادي براي متغير انتگرال گيري است.
از لحاظ تاريخی dx يک کميت بی نهايت کوچک را نشان می‌دهد. هر چند در تئوريهاي جديد، انتگرال گيري بر پايه متفاوتی پايه گذاري شده است.

تابع اوليه

هر گاه معادله مشتق تابعی معلوم باشد وبخواهيم معادله اصلی تابع را تعيين کنيم اين عمل را تابع اوليه می ناميم.
تعريف: تابع اوليه y = f(x)را تابعی مانند Y = F(x) + c می ناميم،هرگاه داشته باشيم:
cعدد ثابت (y = F(x) + c)' = y = f(x)

انتگرال نامعين

تعريف:هرگاه معادله ديفرانسيلی تابعی معلوم باشد وبخواهيم معادله اصلی تابع را معلوم کنيم اين عمل راانتگرال نا معيين ناميده و آن را با نماد $\int$ نمايش می دهند.
بنا به تعريف نماد $\int f(x).dx$ را انتگرال نامعين ناميده وحاصل آن را تابعی مانندF(x) + c در نظر ميگيريم هر گاه داشته باشيم: $\int f(x).dx = F(x) + c$ با شرط: (F(x) + c)' = f(x)

انتگرال معين

بنا به تعريف نماد $\int_a^b f(x).dx$ را انتگرال معين ناميده و حاصل آن را عددي به صورت زير تعريف ميکنيم: b>x>a $\int_a^b f(x).dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$
aوb را به ترتيب کرانهاي بالا و پايين انتگرال مينامیم.

تابع انتگرال‌پذير

اگر تابعی داراي انتگرال باشد به آن انتگرال‌پذير گويند.

تعبیر هندسی انتگرال

از نظر هندسی انتگرال برابر است با مساحت سطح محصور زیر نمودار.

نکته! انتگرال نمودار سه بعدي(انتگرال سه گانه)معرف حجم محصور زیر نمودار است.
انتگرال یک تابع مثبت پیوسته در بازه (0,10) در واقع پیدا کردن مساحت محصور بین خطوط =0x ,
=10x و خم منحنی fx است. aو b نقاط ابتدا و انتهاي بازه هستند و f تابعی انتگرال‌پذیر است و dx نمادي
براي متغیر انتگرال گیري است.

انتگرال یک تابع مساحت زیر نمودار آن تابع است.

انتگرال گیري

انتگرال گیري به معنی محاسبه سطح زیر نمودار با استفاده از روشها وقوانین انتگرال گیري است.
f.1 تابعی در بازه (a,b) در نظر می‌گیریم. 2.پاد مشتق f را پیدا می‌کنیم که تابعی است مانند f که و داریم:
3.قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال را در نظر می‌گیریم:
بنابراین مقدار انتگرال ما برابر خواهد بود.
به این نکته توجه کنید که انتگرال واقعاً پاد مشتق نیست (یک عدد است) اما قضیه اساسی به ما اجازه
می‌دهد تا از پاد مشتق براي محاسبه مقدار انتگرال استفاده کنیم. معمولاً پیدا کردن پاد مشتق تابع f کار
ساده‌اي نیست و نیاز به استفاده از تکنیکهاي انتگرالگیري دارد این تکنیکها عبارت‌اند از :
انتگرال گیري به‌وسیله تغییر متغیر
انتگرال گیري جزء به جزء : $\int u\,dv = uv - \int v\,du$
انتگرال گیري با تغییر متغیر مثلثاتی

انتگرال گیري به‌وسیله تجزیه کسرها
روش هایی دیگر نیز وجود دارد که براي محاسبه انتگرالهاي معین به کار می‌رود همچنین می‌توان بعضی از
انتگرال ها با ترفند هایی حل کرد براي مثال می‌توانید به انتگرال گاوسی مراجعه کنید.
محاسبه سطح زیر نمودار به‌وسیله مستطیل هایی زیر نمودار. هر چه قدرعرض مستطیل ها کوچک
می‌شوندمقدار دقیق تري از مقدار انتگرال بدست می‌آید.

انتگرال هايی معين ممکن است با استفاده از روش هاي انتگرال گيري عددي ،تخمين زده شوند.يکی از عمومی‌ترين روش ها ،روش مستطيلی ناميده می‌شود در اين روش ناحيه زير نمودار تابع به يک سري مستطيل تبديل شده و جمع مساحت آنها نشان دهنده مقدار تقريبی انتگرال است. از ديگر روش هايی معروف براي تخمين مقدار انتگرال روش سيمپسون و روش ذوزنقه‌اي است. اگر چه روش هاي عددي مقدار دقيق انتگرال را به ما نمی‌دهند ولی در بعضی از مواقع که انتگرال تابعی قابل حل نيست يا حل آن مشکل است کمک زيادي به ما می‌کند.

جدول کامل فرمول هاي انتگرال

Rules for integration of general functions

$$\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx \qquad (a \neq 0,\ \text{constant})$$

$$\int [f(x)+g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int f'(x)f(x)\,dx = \frac{1}{2}[f(x)]^2 + C$$

$$\int [f(x)]^n f'(x)\,dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C \qquad (\text{for } n \neq -1)$$

Rational functions

$$\int \mathrm{d}x = x + C$$

$$\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad \text{if } n \neq -1$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$$

Irrational functions

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1} \frac{x}{a} + C$$
$$\int \frac{-dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \cos^{-1} \frac{x}{a} + C$$
$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \sec^{-1} \frac{|x|}{a} + C$$

Logarithms

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - x + C$$
$$\int \log_b x \, dx = x \log_b x - x \log_b e + C$$

Exponential functions

$$\int e^x \, dx = e^x + C$$
$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

Trigonometric functions

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$
$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$
$$\int \tan x \, dx = -\ln |\cos x| + C$$
$$\int \cot x \, dx = \ln |\sin x| + C$$
$$\int \sec x \, dx = \ln |\sec x + \tan x| + C$$
$$\int \csc x \, dx = \ln |\csc x - \cot x| + C$$
$$\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$$
$$\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C$$
$$\int \sec x \, \tan x \, dx = \sec x + C$$
$$\int \csc x \, \cot x \, dx = -\csc x + C$$

$$\int \sin^2 x\, dx = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + C$$
$$\int \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2}(x + \sin x \cos x) + C$$
$$\int \sec^3 x\, dx = \frac{1}{2}\sec x \tan x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + C$$
$$\int \sin^n x\, dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\, dx$$
$$\int \cos^n x\, dx = \frac{\cos^{n-1} x \sin x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\, dx$$
$$\int \arctan x\, dx = x\ \arctan x - \frac{1}{2}\ln\left|1 + x^2\right| + C$$

Hyperbolic functions

$$\int \sinh x\, dx = \cosh x + C$$
$$\int \cosh x\, dx = \sinh x + C$$
$$\int \tanh x\, dx = \ln|\cosh x| + C$$
$$\int \operatorname{csch} x\, dx = \ln\left|\tanh \frac{x}{2}\right| + C$$
$$\int \operatorname{sech} x\, dx = \arctan(\sinh x) + C$$
$$\int \coth x\, dx = \ln|\sinh x| + C$$
$$\int \operatorname{sech}^2 x\, dx = \tanh x + C$$

Inverse hyperbolic functions

$$\int \operatorname{arcsinh} x\, dx = x \operatorname{arcsinh} x - \sqrt{x^2+1} + C$$
$$\int \operatorname{arccosh} x\, dx = x \operatorname{arccosh} x - \sqrt{x^2-1} + C$$
$$\int \operatorname{arctanh} x\, dx = x \operatorname{arctanh} x + \frac{1}{2}\log(1 - x^2) + C$$
$$\int \operatorname{arccsch} x\, dx = x \operatorname{arccsch} x + \log\left[x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + 1\right)\right] + C$$

$$\int \operatorname{arcsech} x\,dx = x\operatorname{arcsech} x - \arctan\left(\frac{x}{x-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) + C$$
$$\int \operatorname{arccoth} x\,dx = x\operatorname{arccoth} x + \frac{1}{2}\log\left(x^2-1\right) + C$$

Definite integrals lacking closed-form antiderivatives

$$\int_0^\infty \sqrt{x}\,e^{-x}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$
$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$
$$\int_0^\infty \frac{x}{e^x-1}\,dx = \frac{\pi^2}{6}$$
$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x-1}\,dx = \frac{\pi^4}{15}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \cdots \cdot (n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \cdots \cdot n}\frac{\pi}{2}$$ (if n is an even integer and $n \geq 2$)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot \cdots \cdot (n-1)}{3\cdot 5\cdot 7\cdot \cdots \cdot n}$$ (if n is an odd integer and $n \geq 3$)

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$$
$$\int_0^\infty x^{z-1}\,e^{-x}\,dx = \Gamma(z)$$
$$\int_{-\infty}^\infty e^{-(ax^2+bx+c)}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\exp\left[\frac{b^2-4ac}{4a}\right]$$
$$\int_0^{2\pi} e^{x\cos\theta}d\theta = 2\pi I_0(x)$$
$$\int_0^{2\pi} e^{x\cos\theta+y\sin\theta}d\theta = 2\pi I_0\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$
$$\int_{-\infty}^\infty (1+x^2/\nu)^{-(\nu+1)/2}dx = \frac{\sqrt{\nu\pi}\ \Gamma(\nu/2)}{\Gamma((\nu+1)/2))}$$ $(\nu > 0,$

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{2^n-1}(-1)^{m+1}2^{-n}f(a+m(b-a)2^{-n})$$

$$\int_0^1 x^{-x}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-n} \qquad (= 1.291285997\ldots)$$

$$\int_0^1 x^{x}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} -(-1)^n n^{-n} \quad (= 0.783430510712\ldots)$$

****

منابع :

http://daneshnameh.roshd.ir/mavara/mavara-index.php?page=%D٨%A٧%D٩%٨٦%D٨%AA%DA%AF%D٨%B١%D٨%A٧%D٩%٨٤&SSOReturnPage=Check&Rand=٠0

http://www.sanjeshmostamar.com/virtualclass/view.aspx?tid=8&cid=512&sid=1880