ریاضی مهندسی

گردآوری :

سراج جمالی

اعداد مختلط

تاریخچه عدد مختلط

در قدیم اعداد منفی را فاقد جذر می دانستند و هر وقت مساله ای به جذر عدد منفی ختم می شد انرا محال می شمردند.

کاردان) ۱۵۰۱-۱۵۷۶ (ریاضی دان ایتالیایی نخستین کسی است که جذر عدد منفی را به کار برد که در معادلات درجه ۲ و ۳ ظاهر شده بودن.دومین ریاضی دانی که جذر عدد منفی را بکار برد بومبلی بود که او نیز ایتالیایی و تا حد زیادی از کاردان الهام گرفته بود.بومبلی این اعداد را موهومی نامید که شدیدا مورد انتقاد ریاضی دانان شد.حتیلاینیتز) ۱۶۴۶-۱۷۱۶ (در باره این اعداد گفت:

"اعداد موهومی نوعی موجود ذوحیاتین بین وجود و عدم وجودنند"

در سال ۱۷۰۲ یوهان برنولی) ۱۶۶۷-۱۷۴۸ (این اعداد را وارد انالیز کرد.نخستین کسانی که اعداد مختلط را بکار بردنند مواور) ۱۶۶۷-۱۷۵۴ (و اویلر) ۱۷۰۷-۱۷۸۳ (بودند.اویلر علامت i را برای جذر ۱- بکار برد.

بیشتر ریاضی دانان اعدادی به شکل a+ib را مقداری موهومی می دانستند وتا اواسط قرن ۱۹ مشروعیتی نداشت.نابغه ریاضیات گاوس) ۱۷۷۷ -۱۸۵۵ (اصطلاح عدد مختلط را برای a+ib وضع کرد و اصطلاح مزدوج مختلط هم از کشی گرفته شد اما کسی که عدد مختلط را رسمی تعریف کرد ویلیام هامیلتن بود.

عدد موهومی

الگو از قسمت رنگی تکرار می‌شود
$i^{-۳} = i$
$i^{-۲} = -۱$
$i^{-۱} = -i$
$i^{۰} = ۱$
$i^{۱} = i$
$i^{۲} = -۱$
$i^{۳} = -i$
$i^{۴} = ۱$
$i^{۵} = i$
$i^{۶} = -۱$
$i^{n} = i^{n \bmod ۴}$

یک عدد موهومی، یک عدد به شکل bi است به طوری که b یک عدد غیر صفر و حقیقی، همچنین iنیز به صورت $i^2 = -1$ (که به آن واحد موهومی نیز می‌گویند) تعریف شده باشد، است. یک عدد موهومی را می‌توان به یک عدد حقیقی مانندa اضافه کرد که پس از آن یک عدد مختلط به شکل$a + bi$ که در آن a و b به ترتیب، قسمت حقیقی و قسمت موهومی است تشکیل شود. همچنین می‌توان گفت که اعداد موهومی، اعداد مختلطی هستند که قسمت حقیقی آن‌ها صفر باشد. مربع یک عدد موهومی، یک عدد حقیقی منفی است.

اعداد مختلط

یک عدد مختلط به صورت $z = a + bi$ یا $z = (a, b)$ تعریف می‌شود که در آن a, b دوعدد اند.در این نمایش i را واحد موهومی می‌نامند و دارای خاصیت $i^2 = -1$ می‌باشد . aرا قسمت حقیقی عدد z و b را قسمت موهومی آن گویند و به ترتیب با $Re(z)$ و $Im(z)$ نمایش می‌دهند .

مزدوج عدد مختلط

$(a, -b)$ را مزدوج z نامیده و با $\overline{z}$ نمایش می‌دهند . به عبارت دیگر مزدوج z عبارت است از . $\overline{z} = a - bi$

برای مثال:

$$\overline{(3-2i)} = 3+2i$$
$$7 = 7$$
$$\bar{i} = -i.$$

تساوی دو عدد مختلط

دو عدد مختلط $z = a+bi$ و $z' = a'+b'i$ را مساوی گویند ، اگر و فقط اگر $a = a'$ و $b = b'$.

نکته

می توانیم مجموعه اعداد حقیقی R را زیرمجموعه اعداد مختلط C در نظر بگیریم. چرا که اگر $b = 0$ ، آنگاه z یک عدد حقیقی خواهد بود. حال اگر $a = 0$ باشد ، $z = bi$ را یک عدد موهومی محض نامند .

عملیات اساسی با اعداد مختلط

$$(a+bi) \pm (c+di) = (a \pm c) + (b \pm d)i$$

$$(a+bi)(c+di) = (ac-bd)(ad+bc)i$$

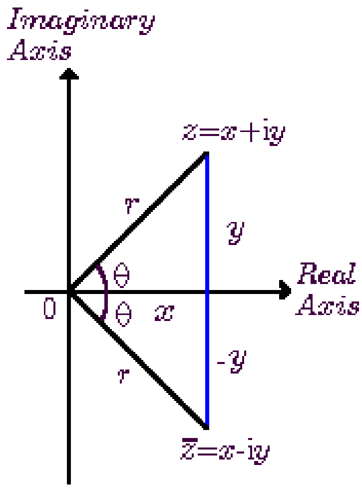
$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} = \frac{ac-adi+bci-bdi^2}{c^2-d^2i^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

یا به صورت

$$(a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i$$
$$(a+bi)-(c+di) = (a-c)+(b-d)i$$
$$(a+bi)(c+di) = ac+bci+adi+bdi^2 = (ac-bd)+(bc+ad)i$$

شکل مثلثاتی یا قطبی اعداد مختلط

اگر z نقطه ای از صفحه مختلط ، متناظر به عدد (x,y) یا $z=x+iy$ باشد ، آنگاه طبق شکل داریم



که در آن $r=\sqrt{x^2+y^2}=|x+iy|$ را قدر مطلق یا نرم یا مدول عدد مختلط $z=x+iy$ گویند و با $|z|$ یا $mod(z)$ نشان می‌دهند و θ را آرگومان یا فاز عدد z گویند و با $arg(z)$ نمایش می‌دهند که زاویه بین oz با جهت مثبت محور x ها است. لذا خواهیم داشت :

$$x=rcos\theta \ , \ y=rsin\theta$$

$$z=x+iy=r(cos\theta+isin\theta)$$

وآن را شکل مثلثاتی یا قطبی عدد مختلط گویند و (r,θ) را مختصات قطبی نامند . اغلب ترجیح داده می‌شود به جای عبارت $cos\theta+isin\theta$ از نماد $cis\theta$ استفاده شود .

قضیه دموآر

اگر به ازای $k=1,2$ داشته باشیم $z_k=r_k(cos\theta_k+isin\theta_k)$ آنگاه روابط زیر برقرارند :

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[cos(\theta_1 + \theta_2) + isin(\theta_1 + \theta_2)]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[cos(\theta_1 - \theta_2) + isin(\theta_1 - \theta_2)]$$

و از تعمیم آن خواهیم داشت :

$$z^n = r^n(cos\ n\theta + isin\ n\theta)$$

ریشه های اعداد مختلط

عدد مختلط w را ریشه n ام عدد مختلط z گویند ، اگر $w^n = z$ باشد و می‌نویسند. $w = z^{\frac{1}{n}}$ اگر n عددی صحیح و مثبت باشد ، می‌توان به کمک قضیه دموآر نشان داد که :

$$z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}[cos(\frac{\theta + 2k\pi}{n}) + isin(\frac{\theta + 2k\pi}{n})]$$

از اینجا نتیجه می‌شود که n مقدار مختلف برای $z^{\frac{1}{n}}$ وجود دارد. یعنی z به شرط ناصفر بودن ، n ریشه n ام مختلف دارد .

فرمول اویلر

می دانیم که :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

اگر قرار دهیم $x = i\theta$ و نتیجه را مرتب کنیم ، خواهیم داشت :

$$e^{i\theta} = cos\ \theta + isin\ \theta$$

که این فرمول را فرمول اویلر گویند . در حالت کلی :

$$e^z = e^{x+iy} = e^x\ e^{iy} = e^x(cos\ y + isin\ y)$$

میدان مختلط

اعداد مختلط را می‌توان به صورت زوج‌های مرتب (a, b) از اعداد حقیقی نیز تعریف کرد. با اعمال:

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$$

$$(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,bc+ad).$$

بنابراین اعداد مختلط تشکیل یک میدان می‌دهند، میدان مختلط، که با C نشان داده می‌شود. از آنجایی که عدد مختلط a + bi به طور منحصربفرد با یک زوج مرتب (a, b) نمایش داده می‌شود، پس اعداد مختلط یک تناظر یک به یک با نقاط در صفحه دارند. به آن صفحه مختلط گفته می‌شود. عدد حقیقی a را با عدد مختلط (a, ۰) نشان می‌دهیم و در این حالت میدان اعداد حقیقی R یک زیرمیدان از C می‌شود. واحد موهومی i عدد مختلط (۰, ۱) است. منظوراز تقسیم دو عدد مختلط یعنی $\frac{a+ib}{c+id}$ یافتن عددی است مثل x + iy که در تساوی

a +ib = (c +id).(x +iy)

صدق نماید، پس از محاسبه رابطه بالا داریم

a +ib = (cx -dy)+i(dx +cy)

پس کافی است اعداد x و y را چنان پیدا کنیم که در روابط dx + cy = b, cx - dy = a صدق کنند. این دستگاه معادلات یک جواب یکتای زیر را دارد:

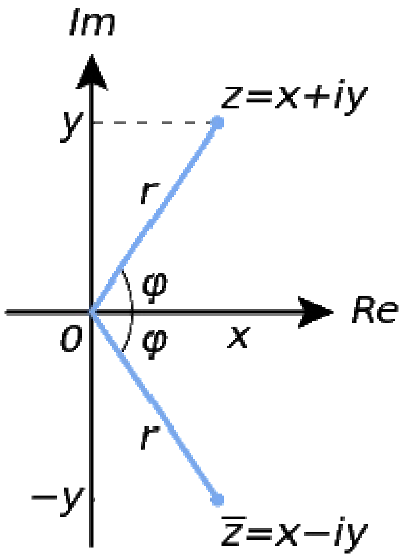
$x=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}$ $y=\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$ مگر آنکه c = d = ۰ بنابر این

$$\frac{a+ib}{c+id}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+i\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$

البته همین نتیجه را می‌توانستیم از ضرب صورت و مخرج کسر $\frac{a+ib}{c+id}$ در c – id نیز بدست آوریم

صفحه مختلط

صفحهٔ مختلط، **یک نمایش هندسی برای اعداد مختلط است. در این نمایش، قسمت حقیقی عدد، بر روی محور افقی) محور حقیقی (و قسمت موهومی آن، بر روی محور عمودی) محور موهومی (نشان داده می‌شوند.**



نمایش هندسی یک عدد مختلط (z) و مزدوج آن ($\bar{z}$) در صفحه مختلط .طول خط آبی‌رنگ از مبدأ تا نقطه z ، قدر مطلق z و زاویه φ ، آرگومان آن است.

حال اگر اعداد مختلط z_1, z_2 را چنین تعریف کنیم :

$z_1 = a + bi \ , \ z_2 = c + di$

حاصل جمع و حاصل ضرب آن ها این گونه تعریف می‌شود

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b = d)i$$

$$z_1 z_2 = (a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

زیرا همان طور که گفتیم، $i^2 = -1$ می‌باشد .

بنابراین جمع و ضرب اعداد مختلط دارای خواص زیر است :

۱.جابجایی

$$z_1 z_2 = z_2 z_1 \ , \ z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

۲.شرکت پذیری

$$z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3 \ , \ z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$$

۳.توزیع پذیری ضرب نسبت به جمع

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$$

صفر مختلط برابر است با $0 + 0i$ ، همچنین z' را قرینه z نامیم هر گاه $z' = -z$

z'' را معکوس z گوییم هر گاه $zz'' = 1$:، بدین ترتیب :

$$z'' = \frac{1}{z} = \frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{bi}{a^2 + b^2}$$

در نتیجه حاصل تقسیم z_1 بر z_2 چنین محاسبه می‌شود :

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2'' = (a + bi)\Big(\frac{c}{c^2 + d^2} - \frac{di}{c^2 + d^2}\Big) = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \Big(\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\Big)i$$

و یک نوع نمایش نیز به این شکل است . $z = (a,b)$ $z = a + bi$

بنابراین اگر فرض کنید $z_1 = (a,b)$ ، $z_2 = (c,d)$ نقاطی در صفحه اند، داریم :

$$z_1 + z_2 = (a,b) + (c,d)$$
$$z_1 z_2 = (a,b)(c,d)$$

که جمع و ضرب آن ها بنابر آنچه که تعریف کردیم، چنین خواهد بود :

$$z_1 + z_2 = (a+c, b+d)$$
$$z_1 z_2 = (ac - bd, bc + ad)$$

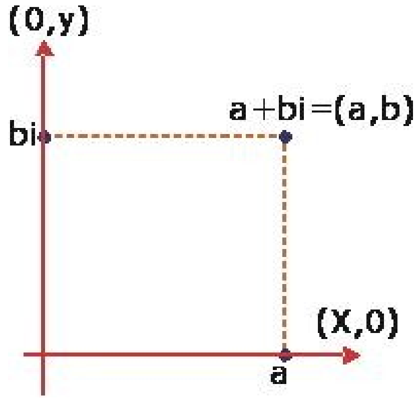
توجه کنید که هر عدد مختلط توسط ۲ جزء (a,b) قابل نمایش است پس با این اعمال روی R^2 دستگاهی از اعداد پدید می آید که به آن دستگاه اعداد مختلط گویند، و آن را با C نمایش می‌دهند. صفحه ای که نقاط آن را اعداد مختلط تشکیل دهند، صفحه مختلط می‌نامند. این صفحه دارای دو محور افقی و عمودی است. تمام اعداد مختلطی را در نظر بگیرید (مانند $z = (a,b)$) که بخش مختلط آن صفر است، این اعداد به صورت

$$(a,0) = a + 0i = a$$

خواهند بود و همان طور که مشاهده می شود، اعدادی حقیقی هستند. یعنی محور افقی این صفحه، محور اعداد حقیقی است. حال اگر بخش حقیقی آن را صفر کنید، اعدادی به صورت $(0,b) = 0 + bi = bi$ بدست می آیند، که محور عمودی این صفحه را تشکیل می دهند و به اعداد مختلط محض معروفند .
با این تعاریف داریم :

$$(a,b) = a(1,0) + b(0,1) = a + bi$$

و آنچه که در مورد جمع و ضرب اعداد مختلط تعریف نمودیم بر تعریف آن در صفحه مختلط هم منطبق خواهد بود. لذا نمایش عدد مختلط $a + bi$ در صفحه مختلط همان نمایش زوج مرتب (a,b) خواهد بود :


(0,y)
a+bi=(a,b)
bi
(X,0)
a

معادلات کوشی-ریمان

معادلات کوشی-ریمان در آنالیز مختلط که به احترام آگوستین لوییز کوشی و برنارد ریمان نام گذاری شده‌اند، دو معادله مشتق جزئی هستند که شرط لازم ولی نه کافی را برای هلومورفیک بودن یک تابع فراهم می‌کنند. با شرایط اضافی مانند اینکه بخش‌های حقیقی و موهومی تابع – توابع حقیقی u و v – مشتقات جزئی پیوسته داشته باشند، برقراری معادلات، معادل می‌شود با تحلیلی بودن تابع مختلط. این مجموعه از معادلات اولین بار در کارهای دالامبر در ۱۷۵۲ ظاهر شد. بعداً در ۱۷۷۷، اویلر این مجموعه را به توابع تحلیلی متصل کرد. کوشی این معادلات را برای ساخت تئوری توابع خود در ۱۸۱۴ به کار برد. رساله کوشی در مورد تئوری توابع در ۱۸۵۱ منتشر شد.

شکل گیری

فرض کنید $f(x + iy) = u + iv$ یک تابع از یک مجموعه باز از اعداد مختلط $\mathbb{C}$ به $\mathbb{C}$ باشد که در آن x ، y، uو v حقیقی اند (u و v توابع حقیقی-مقدار تعریف شده بر یک زیر مجموعه باز از $\mathbb{R}$.
آنگاه f هلوموفیک است اگر و تنها اگر u و v به طور پیوسته مشتق پذیر باشند و مشتقات جزئی آنها در معادلات کوشی ریمان که

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

و

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

هستند، صدق کنند. با یک فرمول بندی مختلط طبیعی، بینش هندسی بهتری بوجود می‌آید:

$$i\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

با توجه به معالات، اگر u و v دوبار مشتق پذیر باشند آنگاه مادامی که در معادلات لاپلاس صدق می‌کنند باید توابع همساز باشند. بنابراین معدلات می‌توانند به صورتی شرایطی بر روی یک جفت تابع همساز دیده شوند که بتوانند به عنوان بخش‌های حقیقی و موهومی یک تابع مختلط تحلیلی به کار روند.

برای یک تابع داده شده همساز u ، یک تابع همساز نظیر مانند v ، یک همساز توأم نامیده می‌شود. اگر وجود داشته باشد، حداکثر یا یک عبارت ثابت منحصر بفرد است.

مثال

فرض کنید مختلط f بر روی مجموعه باز D تحلیلی باشد. آنگاه f در معدلات کوشی-ریمان صدق می‌کند. یعنی اگر $f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$ آنگاه

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{و} \quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}.$$

اکنون فرض کنید f نیز روی D تحلیلی است. آنگاه چون $f(x+iy)=u(x,y)-iv(x,y)$ ، داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{و} \quad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}.$$

با ترکیب کردنشان با معادلات قبلی داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

این نشان می‌دهد که f بر روی D **به طور محلب ثابت** است، و ثابت است اگر D همبند باشد.

مشتق گیری

تابع $f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y)$ بر روی **C** را در نظر بگیرید. می خواهیم مشتق آن را در نقطهٔ z_0 محاسبه کنیم. می‌توانیم در جهت محور حقیقی به z_0 نزدیک شویم و یا در جهت محور موهومی. اگر از مسیر اول برویم:

$$\begin{aligned}
f'(z) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h,y)+iv(x+h,y)-[u(x,y)+iv(x,y)]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{[u(x+h,y)-u(x,y)]+i[v(x+h,y)-v(x,y)]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\frac{u(x+h,y)-u(x,y)}{h}+i\frac{v(x+h,y)-v(x,y)}{h}\right].
\end{aligned}$$

حالا این به شکل دو معادلهٔ دیفرانسیل است. بنابراین:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

با استفاده از مسیر دوم داریم:

$$\begin{aligned}
f'(z) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(z+ih)-f(z)}{ih} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{u(x,y+h)+iv(x,y+h)-[u(x,y)+iv(x,y)]}{ih} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\frac{u(x,y+h)-u(x,y)}{ih}+i\frac{v(x,y+h)-v(x,y)}{ih}\right] \\
&= \lim_{h\to 0} \left[-i\frac{u(x,y+h)-u(x,y)}{h}+\frac{v(x,y+h)-v(x,y)}{h}\right] \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\frac{v(x,y+h)-v(x,y)}{h}-i\frac{u(x,y+h)-u(x,y)}{h}\right].
\end{aligned}$$

مجدداً این نیز به شکل دو معادلهٔ دیفرانسیل است، بنابراین

$$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

با برابر گرفتن این دو داریم

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

با برابر گرفتن بخش‌های حقیقی و موهومی، آنگاه

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad \square$$

شکل دیگر

فرض کنید $z = x + iy$ برای متغیرهای حقیقی x و y. آنگاه می‌توانیم بنویسیم $x = (z + \bar{z})/2$ و $y = (z - \bar{z})/(2i)$. اکنون x و y توابع حقیقی از متغیرهای مستقل مختلط z و $\bar{z}$ هستند. با مشتقگیری از x وy

$$\frac{\partial x}{\partial z} = \frac{1}{2} \text{ and } \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{2i}$$

همینطور

$$\frac{\partial x}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \text{ and } \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} = -\frac{1}{2i}.$$

با مشتقگیری از تابع $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z} \text{ and } \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \bar{z}}.$$

نهایتا با جاگذاری:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right) \text{ and } \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

اگر قرار دهیم $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ ، آنگاه $\frac{\partial f}{\partial x} = -i\frac{\partial f}{\partial y}$ و بنابراین

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = -i\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right),$$

که برابر با معادلات کوشی-ریمان است.

نمایش قطبی

با در نظر گرفتن نمایش قطبی $z = re^{i\theta}$ ، معادلات به این شکل در می‌آیند:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta},$$
$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

و

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{1}{ir}\frac{\partial f}{\partial \theta}$$

که مشتقات روی $re^{i\theta}$ محاسبه شده اند.

منابع

سایت ویکی‌پدیا فارسی http://fa.wikipedia.org

وبلاگ بچه های ریاضی پیام نور اهواز http://math۴pnu.blogfa.com/

جامعه مجازی دانشگاه ولی عصر (عج) رفسنجان http://forum.vru.ac.ir/

وبلاگ ریاضیات http://www.reyazi.blogfa.com/